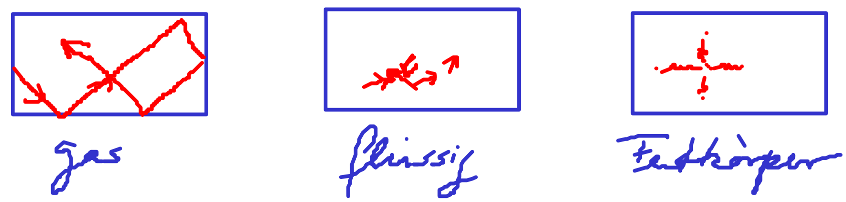
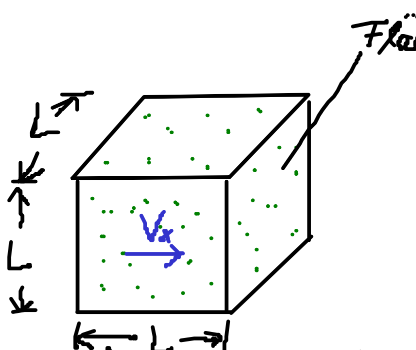
kinetische Theorie



Ziel: Erklärung des Drucks über Stöße der Teilchen an Wand

Ideales Gas:
- punktförmig
- Stöße sind elastisch (untereinander und mit Wand)
- keine Wechselwirkungen (WW) zwischen Teilchen

Betrachte ein Teilchen in der Box:



Impuls vor dem Stoß: $m \cdot v_x$

Impuls nach dem Stoß: $-m \cdot v_x$

(m = Masse des Moleküls)

Impulsübertrag auf die Wand beim Stoß: $\Delta p_x = 2 m v_x$

" erfolgt alle $\Delta t = \frac{2L}{v_x}$

2. Newton: Impulsübertrag alle $\Delta t \mathrel{\hat{=}}$ konstante Kraft F

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2 m v_x}{2L/v_x} = \frac{m v_x^2}{L}$$

Impulsüberträge erzeugen Druck: $p = \frac{F}{A} = \frac{m v_x^2}{LA} = \frac{m v_x^2}{V}$

$$pV = m v_x^2$$

Verallgemeinerung:

- N Teilchen $\qquad p \cdot V = N \cdot m \cdot v_x^2$
- nicht alle Teilchen haben selbe Geschwindigkeit v_x

$\longrightarrow p \cdot V = N \cdot m \cdot \overline{v_x}^2$

- nicht alle Teilchen in x Richtung $\qquad v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$

$\overline{v}^2 = \overline{v_x}^2 + \overline{v_y}^2 + \overline{v_z}^2 = 3\overline{v_x}^2$

$$\longrightarrow \boxed{p \cdot V = \frac{N m \overline{v}^2}{3}}$$

bzw $\quad p V = \frac{2}{3} N \cdot \underbrace{\frac{1}{2} m \overline{v}^2}_{\overline{E}_{kin}}$

Mittelwert kin. Energie ($\forall$ Teilchen) $\overline{E}_{kin}$

Einführung der Temperatur $\qquad E_{kin} = \frac{3}{2} k T$

k: Boltzmann konstante $1{,}38 \cdot 10^{-23}\,J/K$

T: absolute Temperatur [K]

Damit $\quad p V = \frac{2}{3} N \cdot \frac{m v^2}{2} = \frac{2}{3} N \frac{3}{2} k T \Rightarrow \boxed{p V = N k T}$

Umformung: $\quad N = n N_A$

$N_A \to 6 \cdot 10^{23}$

$$\downarrow$$

$$p V = n \underbrace{N_A k}_{\to R} T$$

$$\downarrow$$

mit $R = 8{,}31 \frac{J}{mol \cdot K}$ (allgemeine Gaskonstante)

$$\boxed{p V = n R T}$$

allgemeine Gasgleichung für id. Gas!

Bedeutung: - Naturgesetz

- dient zur Definition des Temperaturbegriffs

1) <u>Abschätzung von $\bar{v}$</u> $\quad \bar{E}_{kin} = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{3}{2} kT$

$$\longrightarrow \sqrt{\bar{v}^2} = \left(\frac{3kT}{m}\right)^{1/2} = \left(\frac{3RT}{M}\right)^{1/2}$$

Für N_2 bei 298 K: $\bar{v} = 525$ m/s ≈ Schallgeschwindigkeit

2) $\boxed{T = 0\,K}$ – „absoluter Nullpunkt" $\longrightarrow p = 0$
keine Teilchenbewegung (klassisch)
– <u>qm.</u> Einschränkung: „Nullpunktsenergie"
– reales Gas verflüssigt sich bei tiefen Temperaturen
$\rightarrow$ id. Gasgleichung ungültig!

Temperaturskalen:

Kelvin Nullpunkt $T = 0$ K

Celsius $\frac{T_K}{[K]} = \frac{T_C}{[°C]} + 273{,}15$

Fahrenheit $\frac{T_F}{[F]} = \frac{9}{5} \cdot \frac{T_C}{[C]} + 32$

Die Maxwell Boltzmann Verteilung

Boltzmann Verteilungssatz

System mit i Zuständen mit Energie ε_i

$\rightarrow$ Wkt P_i, daß System im Zustand i ist

g_i : statistisches Gewicht des Zustandes

$$\boxed{P_i = g_i\, e^{-\frac{E_i}{kT}}}$$

N Moleküle, id. Gas Anteil Teilchen mit Geschwindigkeit $v_x = N_i$

$\longrightarrow N_i = N \cdot e^{-\frac{E_i}{kT}} = N \cdot e^{-\frac{m v_x^2}{2kT}}$ $\longrightarrow$ differentiell : $\frac{dN}{N} = A \cdot e^{-\frac{m v_x^2}{2kT}}\, dv_x$

Normierungsbedingungen: $\int_{-\infty}^{\infty} dN = N$ bzw. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dN}{N} = 1$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} A\, e^{-\frac{m v_x^2}{2kT}} \cdot dv_x = 1$

$$A = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m v_x^2}{2kT}} \cdot dv_x}$$

mit Substitution $z^2 = \frac{m v_x^2}{2kT}$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{2kT}{m}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}\, dz}$$

"Fehlerintegral" (Gausglocke)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}\, dz = \sqrt{\pi}$$

$\rightarrow A = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}$ Wahrscheinlichkeitsdichte $= \frac{dN}{N} \cdot \frac{1}{dV_x}$

$$\boxed{f(v_x) = \frac{dN}{N} \cdot \frac{1}{dV_x} = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\; e^{-\frac{m v_x^2}{2kT}}}$$

eindimensionale Geschwindigkeitsverteilung v. Gas

$\rightarrow$ 1dim Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung