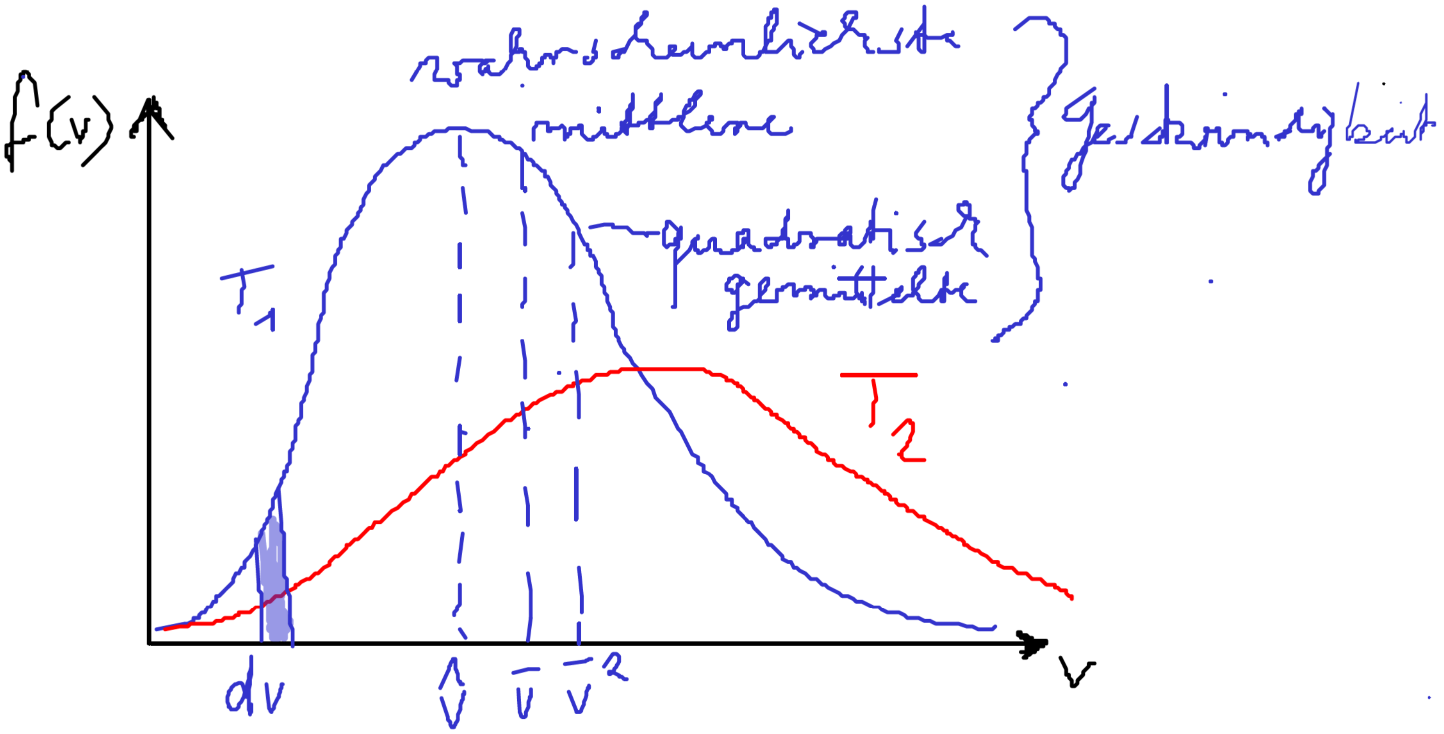
3dim Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung

$$\boxed{f(v) = 4\pi \left[\frac{m}{2\pi kT}\right]^{3/2} \cdot v^2 \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}}}$$



Berechnung der charakteristischen Geschwindigkeiten $\bar{v}, \hat{v}, \sqrt{\bar{v}^2}$

Erinnerung: Mittelwertbildung $\bar{p} = \sum_{i=1}^{m} p_i f_i \xrightarrow{\text{kontinuierlich}} \bar{p} = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) f(x)\, dx$

$$\overline{v^2} = \int_0^\infty v^2 f(v)\, dv$$

$$= 4\pi \left[\frac{m}{2\pi kT}\right]^{3/2} \int_0^\infty v^2 \cdot v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \cdot dv$$

$$\int_0^\infty x^4 e^{-ax^2} dx = \frac{3}{8}\left(\frac{\pi}{a^5}\right)^{1/2}$$

$$= 4\pi \left[\frac{m}{2\pi kT}\right]^{3/2} \left[\frac{2kT}{m}\right]^{5/2} \cdot \frac{3}{8}\sqrt{\pi}$$

$$= \frac{3kT}{m}$$

$$= \frac{3RT}{M} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = v_{RMS}} \longrightarrow \text{Maß für mittlere } E_{kin} = \frac{m}{2} v^2 = \frac{3}{2} k_B T$$

$RT = kT \cdot N_A$

Analog $\bar{v}$: (auch: $v_{average}$)

$$\bar{v} = \int_0^\infty v \cdot f(v)\, dv = \ldots = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \boxed{\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \bar{v}}$$

· Bestimmung von $\hat{v}$ (v_{mp})

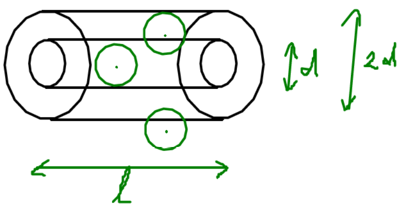
graphische Maximumsbestimmung $\frac{d}{dv}(f(v)) = \frac{d}{dv}\left[4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}\right] \doteq 0$

$$\rightarrow \boxed{\hat{v} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}}$$

$$\boxed{\hat{v} : \bar{v} : \sqrt{\bar{v^2}} \doteq 0{,}82 : 0.92 : 1}$$

Bsp Ar bei RT: $352 \frac{m}{s} : 397 \frac{m}{s} : 432 \frac{m}{s}$

Mittlere freie Weglänge und Stoßzahlen



· Anzahl der Stöße
· zurückgelegter Weg $\bar{v} = \frac{l}{t} \rightarrow l = v \cdot t$
· Molekülzahl $N = \rho \cdot V$

ρ: Teilchendichte

V: Volumen des Stoßzylinders

$$V = \pi d^2 \cdot \bar{v} t \rightarrow N_{Stoß} = \rho \cdot \pi d^2 \bar{v} t$$

$$= \sigma \cdot \bar{v} t \rightarrow N_{Stoß} = \rho \sigma \bar{v} t$$

$\sigma = \pi d^2$ (geometrischer) Wirkungsquerschnitt

Freie Weglänge λ

$$\lambda = \frac{\text{zurückgelegter Weg}}{\#\ \text{Stöße}} = \frac{\cancel{\bar{v} \cdot t}}{\varrho \pi d^2 \cancel{\bar{v} t}} = \frac{V}{\pi d^2 N}$$

exakt (3D)

(Mittelung über alle Winkel
→ Faktor $\sqrt{2}$
siehe Folie)

$$\lambda = \frac{V}{\sqrt{2}\pi d^2 N} \underset{pV = NRT}{=} \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}$$

$$= \frac{V}{\sqrt{2}\sigma N} = \frac{kT}{\sqrt{2}\sigma p}$$

Stoßzahl: $Z_1 = \frac{N_{Stoß}}{t} = \frac{\sqrt{2}\pi d^2 \bar{v} \cdot N}{V} = \frac{\sqrt{2}\pi d^2 \bar{v} \cdot p}{kT}$

" aller Moleküle (pro sec + Vol. einheit) $Z_{11} = Z_1 \frac{N}{V} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \pi d^2 \bar{v} \left(\frac{N}{V}\right)^2$

Z_{11}: für identische Moleküle

$\frac{1}{2}$: Stöße werden sonst doppelt gezählt

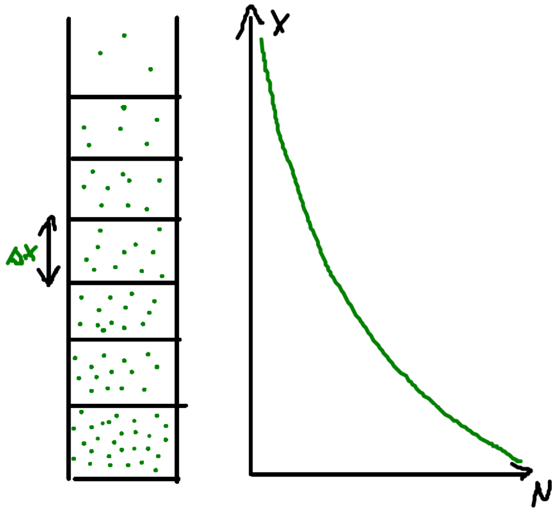
typ. Stoßquerschnitte (σ)

Benzol	: 0.88 nm^2
CO_2	: 0.52 nm^2
He	: 0.21 nm^2
N_2	: 0.43 nm^2

Stoßzahl N_2 (Normalbedingungen) $5 \cdot 10^5 s^{-1}$

Anwendungen: Diffusion, Kinetik...

Barometrische Höhenformel



Teilchenzahl: $N \Leftrightarrow$ Druck p

$pV = NkT$; $N = \frac{pV}{kT} = \frac{pA\Delta x}{kT}$

Was für eine Kraft wirkt auf die Teilchen?

Gravitation: $F = mg$

außerdem gilt: $p = \frac{F}{A} \rightarrow \Delta p = \frac{\Delta F}{A}$

$$\Rightarrow \Delta p = -\frac{N \cdot mg}{A} = -\frac{p\Delta x \cdot mg}{kT}$$

$$\Rightarrow dp = -p\frac{mg}{kT}\,dx$$

$$\frac{dp(x)}{dx} = -p(x)\frac{mg}{kT}$$

Welche Art Fkt ist abgeleitet const · Fkt?

$\rightarrow e^x$

$$\Rightarrow \boxed{p = p_0 \cdot e^{-\frac{mgx}{kT}}}$$

Luftdruck (N_2) Mt Everest: $x = 8882\,m$

$\rightarrow p = 0.34\,p_0$